લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક **અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 14**

PART A

1. (A) **2.** (D) **3.** (A) **4.** (B) **5.** (C) **6.** (D) **7.** (D) **8.** (B) **9.** (B) **10.** (A) **11.** (B) **12.** (A) **13.** (B) **14.** (C) **15.** (C) **16.** (C) **17.** (A) **18.** (B) **19.** (B) **20.** (A) **21.** (C) **22.** (A) **23.** (A) **24.** (A) **25.** (A) **26.** (D) **27.** (D) **28.** (A) **29.** (A) **30.** (B) **31.** (B) **32.** (A) **33.** (C) **34.** (C) **35.** (A) **36.** (D) **37.** (C) **38.** (A) **39.** (C) **40.** (B) **41.** (C) **42.** (B) **43.** (A) **44.** (A) **45.** (C) **46.** (C) **47.** (A) **48.** (A) **49.** (C) **50.** (B)

PART B

વિભાગ-A

1.

$\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\tan^2\dfrac{x}{2}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$

$\left(\because\ 0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}\ \therefore\ \tan\dfrac{x}{2} > 0\right)$

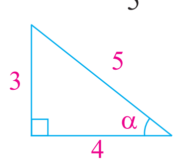
$= \dfrac{x}{2}\ \left(\because\ \dfrac{x}{2} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

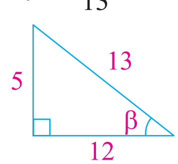
2.

ડા.બા. $= \cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13}$

$\cos^{-1}\dfrac{4}{5} = \alpha$, $\cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \beta$

$\therefore\ \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{12}{13}$





$\therefore\ \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$

અહીં, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}\right) - \left(\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}\right)$

$= \dfrac{48}{65} - \dfrac{15}{65}$

$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{33}{65}$

$\therefore\ \alpha+\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{33}{65}\right)$

$\therefore\ \cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \cos^{-1}\dfrac{33}{65}$

3.

$y = 5\cos x - 3\sin x$ નું

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\dfrac{dy}{dx} = -5\sin x - 3\cos x$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે પુન: વિકલન કરતાં,

$\therefore\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = -5\cos x + 3\sin x$

$\therefore\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = -(5\cos x - 3\sin x)$

$\therefore\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$

$\therefore\ \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

4.

$$I = \int e^x \frac{(x-3)}{(x-1)^3}\, dx = \int e^x\left(\frac{(x-1)-2}{(x-1)^3}\right) dx$$

$$= \int e^x\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx$$

$$= \int e^x\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)\right) dx$$

$$I = \frac{e^x}{(x-1)^2} + c \qquad \left(\because \int e^x(f(x) + f'(x))\, dx = e^x f(x) + c\right)$$

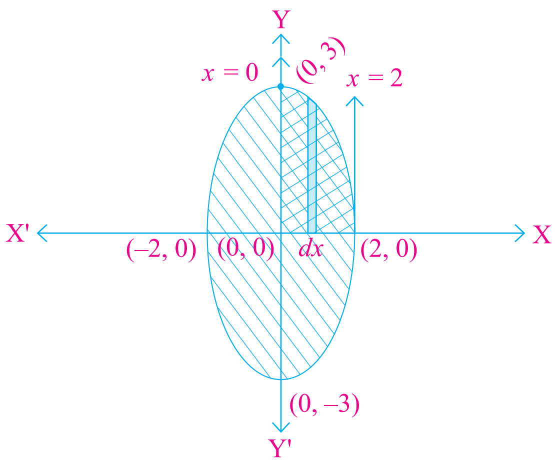
5.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 4,\ a = 2$

$b^2 = 9,\ b = 3$

$b > a$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ :

A = 4 × પ્રથમ પ્રદેશ વડે આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ

$\therefore A = 4|I|$

હવે, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\therefore y^2 = 9\left[1 - \frac{x^2}{4}\right]$

$= \frac{9}{4}(4 - x^2)$

$\therefore y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

$$I = \int_0^2 y\, dx$$

$$I = \int_0^2 \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$$I = \frac{3}{2}\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2}\, dx$$

$$I = \frac{3}{2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$I = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{2}{2}(0) + 2\sin^{-1}(1)\right) - (0)\right]$$

$$I = \frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{3\pi}{2}$$

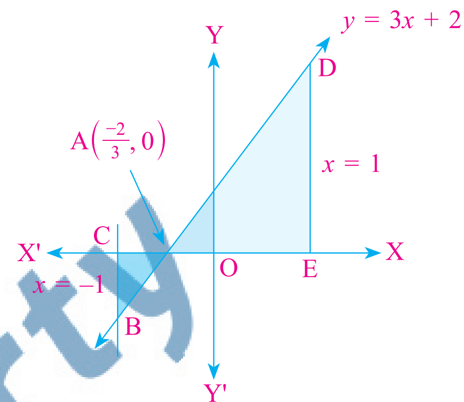
હવે, $A = 4|I|$

$$= 4\left|\frac{3\pi}{2}\right|$$

$\therefore\ A = 6\pi$ ચોરસ એકમ

6.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેખા $y = 3x + 2$, X-અક્ષને $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$માં છેદે છે અને આ આલેખ $x \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ માટે X-અક્ષની નીચે છે અને આલેખ $x \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ માટે X-અક્ષની ઉપર છે.



માંગેલ ક્ષેત્રફળ

= પ્રદેશ ACBAનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ ADEAનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left|\int_{-1}^{-\frac{2}{3}} (3x+2)\, dx\right| + \int_{-\frac{2}{3}}^{1} (3x+2)\, dx$$

$$= \left|\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)_{-1}^{-\frac{2}{3}}\right| + \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)_{-\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \left|\left(\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}(1) + 2(-1)\right)\right| + \left(\frac{3}{2}(1) + 2(1)\right) - \left(\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} + 2\right| + \frac{3}{2} + 2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \left|\frac{-2}{3} - \frac{3}{2} + 2\right| + \frac{3}{2} + 2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left|\frac{-4 - 9 + 12}{6}\right| + \frac{9 + 12 + 4}{6}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{25}{6}$$

$$= \frac{26}{6}$$

$= \frac{13}{3}$ ચોરસ એકમ

7.

$$\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = a, \qquad \text{જ્યાં } a \in [-1, 1]$$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos^{-1}(a)$

$\therefore \quad dy = \cos^{-1}(a)\, dx$

→ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \int 1\, dy = \cos^{-1}(a) \int 1\, dx$

$\therefore \quad y = \cos^{-1}(a) \cdot x + c \qquad \dots (1)$

$x = 0$ ત્યારે $y = 2$

$\therefore\ 2 = \cos^{-1}(a) \cdot 0 + c$

$\therefore\ c = 2$

cની કિંમત પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$\therefore \quad y = \cos^{-1}(a) \cdot x + 2$

$\therefore\ \cos^{-1}(a) = \frac{y-2}{x}$

$\therefore\ a = \cos\left[\frac{y-2}{x}\right];$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

8.

A નો સ્થાન સદિશ $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}$

B નો સ્થાન સદિશ $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$

C નો સ્થાન સદિશ $\vec{c} = 3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$= \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

$= \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$

હવે, $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$

$\therefore\ (\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) = \lambda\hat{i} + 4\lambda\hat{j} - 4\lambda\hat{k}$

$\therefore\ 1 = \lambda,\ 4 = 4\lambda,\ -4 = -4\lambda$

$\therefore\ \lambda = 1,\ \lambda = 1,\ \lambda = 1$

$\therefore$ અહીં, λ ની ત્રણેય કિંમતો સમાન છે.

$\therefore$ બિંદુઓ A, B, C સમરેખ છે.

9.

$$L : \frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$$

$$\therefore\ \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{\frac{2p}{7}} = \frac{z-3}{2}$$

$L : \vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda\left(-3\hat{i} + \frac{2p}{7}\hat{j} + 2\hat{k}\right)$

$\therefore\ \vec{b_1} = -3\hat{i} + \frac{2p}{7}\hat{j} + 2\hat{k}$

હવે, $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$

$$\therefore\ \frac{x-1}{-\frac{3p}{7}} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$$

$M : \vec{r} = (\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu\left(\frac{-3p}{7}\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}\right)$

$\therefore\ \vec{b_2} = \frac{-3p}{7}\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

→ L અને M પરસ્પર લંબ હોવાથી;

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = 0$

$\therefore\ \left(-3\hat{i} + \frac{2p}{7}\hat{j} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(-\frac{3p}{7}\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}\right) = 0$

$\therefore\ \frac{9p}{7} + \frac{2p}{7} - 10 = 0$

$\therefore\ \frac{11p}{7} = 10$

$\therefore\ p = \frac{70}{11}$

10.

ધારો કે A(1, –1, 2), B(3, 4, –2), C(0, 3, 2), D(3, 5, 6) આપેલ બિંદુઓ છે.

$\vec{b_1} = \overrightarrow{AB}$

= B નો સ્થાનસદિશ – A નો સ્થાનસદિશ

$= 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{b_2} = \overrightarrow{CD}$

= D નો સ્થાનસદિશ – C નો સ્થાનસદિશ

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = (2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6 + 10 - 16$

$= 0$

$\therefore\ \vec{b_1}$ અને $\vec{b_2}$ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

11.

P(B) = 0.5

P(A ∩ B) = 0.32

$\therefore\ P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{0.32}{0.5}$

$= \frac{32}{100} \times \frac{10}{5}$

$= \frac{64}{100}$

$= 0.64$

12.

ઘટના E_1 : ભૂખરા રંગના વાળવાળો પુરુષ હોય.

ઘટના E_2 : ભૂખરા રંગના વાળવાળી સ્ત્રી હોય.

$P(E_1) = \frac{1}{2}$

$P(E_2) = \frac{1}{2}$

ઘટના A : ભૂખરા રંગના વાળવાળી વ્યક્તિ પસંદ થાય.

ભૂખરા રંગના વાળવાળી વ્યક્તિ પુરુષ હોય તેની સંભાવના

$\therefore P(E_1 \mid A) = ?$

$\therefore P(A) = P(E_1) \cdot P(A \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(A \mid E_2)$

$P(A \mid E_1)$ = પુરુષને ભૂખરા રંગના વાળ હોય

$= \frac{5}{100}$

$P(A \mid E_2)$ = સ્ત્રીને ભૂખરા રંગના વાળ હોય

$= \frac{0.25}{100}$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{0.25}{100} = \frac{5+0.25}{200} = \frac{5.25}{200}$$

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(A \mid E_1) \cdot P(E_1)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad P(E_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{100}}{\frac{5.25}{200}} = \frac{5}{5.25} = \frac{5 \times 100}{525} = \frac{20}{21}$$

વિભાગ-B

13.

અહીં $f : N \to N$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \\ \frac{n}{2} & n \text{ યુગ્મ,} \end{cases}$

$n_1 = 3$, $n_2 = 4$ લેતાં,

$f(n_1) = \frac{3+1}{2} = 2$ તથા $f(n_2) = f(4) = \frac{4}{2} = 2$

અહીં $n_1 \neq n_2$ પરંતુ $f(n_1) = f(n_2)$

$\therefore$ f એ એક-એક વિધેય નથી.

પ્રદેશ $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \\ \frac{n}{2} & n \text{ યુગ્મ,} \end{cases}$

$f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$

$f(3) = \frac{3+1}{2} = 2$

$f(4) = \frac{4}{2} = 2$

$f(5) = \frac{5+1}{2} = 3$

$f(6) = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore R_f = \{1, 2, 3, 4 ....\} = N$ (સહપ્રદેશ)

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય છે.

14.

અહીં A અને B સંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ A' = A તથા B' = B ... (1)

હવે, X = AB – BA લેતાં

X' = (AB – BA)'

= (AB)' – (BA)'

= B'A' – (A'B')

= BA – AB ($\because$ પરિણામ (1))

= – (AB – BA)

= – X

$\therefore$ X એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ AB – BA એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

15.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$= 1[-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha] - 0 + 0$

$= -1 [\cos^2\alpha + \sin^2\alpha]$

$= -1 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

1 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$

$= 1(-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= -1$

0 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix}$

$= (-1)(0 - 0)$

$= 0$

0 નો સહઅવયવ $\quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix}$

$= 1(0 - 0)$

$= 0$

0 નો સહઅવયવ $\quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$

$= (-1)\ (0 - 0)$

$= 0$

$\cos\alpha$ નો સહઅવયવ $\quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix}$

$= 1(-\cos\alpha - 0)$

$= -\cos\alpha$

$\sin\alpha$ નો સહઅવયવ $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix}$

$= (-1)(\sin\alpha - 0)$

$= -\sin\alpha$

0 નો સહઅવયવ $\quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

$= 1(0 - 0)$

$= 0$

$\sin\alpha$ નો સહઅવયવ $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix}$

$= (-1)(\sin\alpha - 0)$

$= -\sin\alpha$

$-\cos\alpha$ નો સહઅવયવ $\quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}$

$= 1(\cos\alpha - 0)$

$= \cos\alpha$

અહીં, $adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

હવે, $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\ adj\ A$

$= \dfrac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

16.

$y = \sin^{-1}x$ હોવાથી, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$

$\therefore \sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = 0$

$\therefore \sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\therefore (1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$

બીજી રીત :

$y = \sin^{-1}x$ આપેલ હોવાથી,

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ અર્થાત્ $(1 - x^2)\ y_1^2 = 1$

આથી, $(1 - x^2) \cdot 2y_1y_2 + y_1^2(0 - 2x) = 0$

$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$

17.

$f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}, \qquad x \neq 0$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^4}$

$= \dfrac{3x^6 - 3}{x^4}$

$= \dfrac{3(x^6 - 1)}{x^4}$

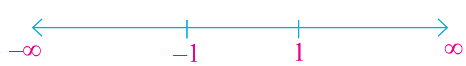
$\rightarrow$ હવે, અંતરાલ મેળવવા માટે,

$f'(x) = 0$

$\dfrac{3(x^6 - 1)}{x^4} = 0$

$\therefore \quad x^6 - 1 = 0$

$\therefore \quad x = \pm 1$



$\rightarrow \forall\ x \in (-\infty, -1) \Rightarrow x < -1$

$\Rightarrow x^6 > 1$

$\Rightarrow x^6 - 1 > 0$

$\Rightarrow 3(x^6 - 1) > 0\ ,\ x^4 > 0$

$\Rightarrow \dfrac{3(x^6 - 1)}{x^4} > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\therefore$ f એ $(-\infty, -1)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\rightarrow \forall\ x \in (-1, 1) - \{0\} \Rightarrow -1 < x < 1$

$\Rightarrow 0 < x^6 < 1$

$\Rightarrow x^6 - 1 < 0$

$\Rightarrow 3(x^6 - 1) < 0,\ \ x^4 > 0$

$\Rightarrow \dfrac{3(x^6 - 1)}{x^4} < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$

$\therefore$ f એ $(-1, 1) - \{0\}$ અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$\rightarrow \quad \forall\ x \in (1, \infty) \quad \Rightarrow x > 1$

$\Rightarrow x^6 > 1$

$\Rightarrow x^6 - 1 > 0$

$\Rightarrow 3(x^6 - 1) > 0\ ,\ x^4 > 0$

$\Rightarrow \dfrac{3(x^6-1)}{x^4} > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\therefore$ f એ $(1, \infty)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

18.

P નો સ્થાન સદિશ $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

Q નો સ્થાન સદિશ $\vec{Q} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

(i) ધારો કે, P અને Q ને જોડતાં રેખાખંડનું 2 : 1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતું બિંદુ R છે.

R નો સ્થાન સદિશ $= \dfrac{\lambda\vec{Q} + \vec{P}}{\lambda+1}$,

અહીં $\lambda = 2$ ($\because$ અંતઃવિભાજન)

$$= \frac{2(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{2+1}$$

$$= \frac{-2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}+\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{3}$$

Rનો સ્થાન સદિશ $= \dfrac{-1}{3}\hat{i}+\dfrac{4}{3}\hat{j}+\dfrac{1}{3}\hat{k}$

(ii) ધારો કે, P અને Q ને જોડતાં રેખાખંડનું 2 : 1 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતું બિંદુ R છે.

R નો સ્થાન સદિશ $= \dfrac{-\lambda\vec{Q} + \vec{P}}{-\lambda+1}$

અહીં $\lambda = 2$ ($\because$ બહિર્વિભાજન)

$$= \frac{-2(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{-2+1}$$

$$= \frac{2\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}+\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{-1}$$

R નો સ્થાન સદિશ $= -3\hat{i} + 3\hat{k}$

19.

L : $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$;

M : $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$\therefore \vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore \vec{b_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, તથા

$\vec{a_2} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$;

$\vec{b_2} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

હવે, $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -3\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$

$\neq \vec{0}$

$\therefore$ રેખાઓ છેદક અથવા વિષમતલીય છે.

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$

હવે, $(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})$

$= (\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k})$

$= -3 + 0 - 6$

$= -9$

$\neq 0$

$\therefore$ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર,

$$= \frac{\left|(\vec{a_2}-\vec{a_1})\cdot(\vec{b_1}\times\vec{b_2})\right|}{\vec{b_1}\times\vec{b_2}}$$

$$= \frac{|-9|}{\sqrt{9+0+9}}$$

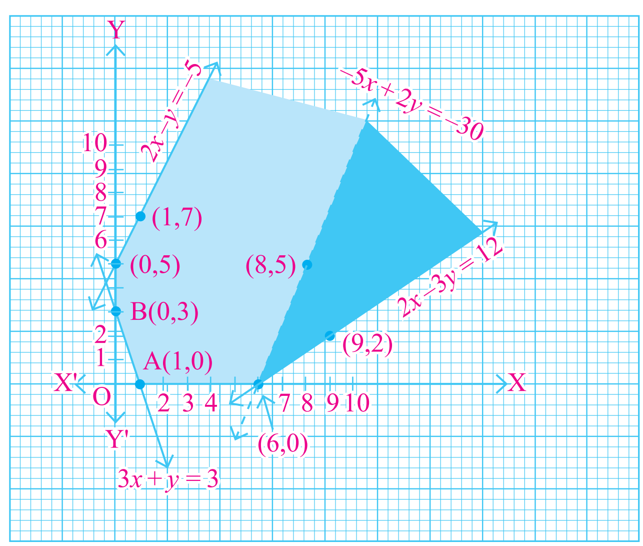
$$= \frac{9}{\sqrt{18}}$$

$$= \frac{9}{3\sqrt{2}}$$

$= \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ એકમ

20.

પ્રથમ આપણે અસમતા સંહતિ (2) થી (5) દ્વારા રચાતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનો આલેખ દોરીએ. આકૃતિમાં શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ રંગીન દર્શાવવામાં આવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત છે.



હવે, આપણે શિરોબિંદુઓ આગળ Zના મૂલ્ય શોધીએ.

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = -50x + 20y$ નું સંગત મૂલ્ય
(0, 5)	100
(0, 3)	60
(1, 0)	–50
(6, 0)	$-300 \rightarrow$ ન્યૂનતમ

આ કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે બિંદુ (6, 0) આગળ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય –300 મળી શકે છે. આપણે Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય –300 છે એમ કહી શકીએ? આપણે નોંધીશું કે જો પ્રદેશ સીમિત હોય તો Zની આ નાનામાં નાની કિંમત Zનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય થયું હોત (પ્રમેય 2). પરંતુ અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત છે. માટે Zની ન્યૂનતમ કિંમત –300 હોય પણ ખરી અને ન પણ હોય. આ નક્કી કરવા માટે આપણે અસમતા $-50x + 20y < -300$ એટલે કે $-5x + 2y < -30$ (શિરોબિંદુની રીતનો મુદ્દો ક્રમાંક 3(ii) જુઓ)ને આલેખીએ અને ચકાસીશું કે અસમતાથી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનાં બિંદુઓ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં બિંદુઓ સાથે સામાન્ય છે કે નહિ. જો સામાન્ય બિંદુઓ હોય, તો –300 એ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન હોય. અન્યથા –300 એ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

➪ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેને સામાન્ય બિંદુઓ છે. આથી $Z = -50x + 20y$ ને આપેલ શરતો અનુસાર ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે.

21.

➪ ઘટના E_1 : બંને બાજુ છાપ ધરાવતો સિક્કો હોય.

ઘટના E_2 : અસમતોલ સિક્કો હોય.

ઘટના E_3 : સમતોલ સિક્કો હોય.

$P(E_1) = \frac{1}{3}$,

$P(E_2) = \frac{1}{3}$,

$P(E_3) = \frac{1}{3}$

ઘટના A : સિક્કા પર છાપ મળે.

$P(A \mid E_1) = 1$,

$P(A \mid E_2) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$,

$P(A \mid E_3) = \frac{1}{2}$

સિક્કા પર છાપ મળે અને તે બે છાપ ધરાવતો સિક્કો હોય તેની સંભાવના,

$$\therefore P(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A \mid E_1)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(A \mid E_2) + P(E_3) \cdot P(A \mid E_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{75}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4+3+2}{12}$$

$$= \frac{9}{12}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(E_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{9}$$

વિભાગ-C

22.

➪ I એ 2 કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક છે.

$$\therefore I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

હવે, $I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$I + A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{......... (1)}$$

હવે, $(I - A) \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\alpha}{2} \\ -\tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2} & -\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\alpha \tan\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha & \sin\alpha \tan\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha \end{bmatrix}$$

હવે, $\cos\alpha + \sin\alpha \tan\frac{\alpha}{2}$

$$= \cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$\left(\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \text{ અને } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right)$

$$= \cos\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \cos\alpha + 1 - \cos\alpha$$

$$= 1$$

$$-\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$= -2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\left[-2\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left[-2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right]$$

$$= \tan\frac{\alpha}{2}\left[-2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right]$$

$$= -\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

(1) અને (2) પરથી

$$I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

23.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-14}{13} & \frac{-11}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{-11}{13} & \frac{-4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \frac{-14}{13}\left(\frac{-4}{169} - \frac{9}{169}\right)\frac{+11}{13}\left(\frac{-11}{169} - \frac{15}{169}\right)\frac{+5}{13}\left(\frac{-33}{169}\ \frac{+20}{169}\right)$$

$$= \frac{-14}{13}\left(\frac{-13}{169}\right)\frac{+11}{13}\left(\frac{-2}{169}\right)\frac{+5}{13}\left(\frac{-13}{169}\right)$$

$$= \frac{14}{169}\ \frac{-22}{169}\ \frac{-5}{169}$$

$$= \frac{-13}{169}$$

$$= \frac{-1}{13} \neq 0$$

$\therefore$ $(A^{-1})^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|}\, adj\,(A^{-1})$$

$$= -13\begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix} \quad (\because \text{ પરિણામ } (2))$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A^{-1})^{-1} = A$$

24.

$$x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

હવે, બંને બાજુ t પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{\cos 2t}\,\frac{d}{dt}(\sin^3 t) - (\sin^3 t)\frac{d}{dt}\sqrt{\cos 2t}}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos 2t}\cdot 3\sin^2 t\cdot \cos t - \sin^3 t \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}(-2\sin 2t)}{\cos 2t}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{\cos 2t \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t + \sin^3 t \cdot \sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}} \quad ... (1)$$

હવે, $y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ ની

બંને બાજુ t પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{\cos 2t}\,\frac{d}{dt}(\cos^3 t) - \cos^3 t\,\frac{d}{dt}\sqrt{\cos 2t}}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos 2t}\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t) - \cos^3 t\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\cos 2t}}(-\cancel{2}\sin 2t)}{\cos 2t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-\cos 2t \cdot 3\cos^2 t \cdot \sin t + \cos^3 t \cdot \sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}} \quad ... (2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{-3\cos^2 t\cdot \sin t \cdot \cos 2t + \cos^3 t \cdot \sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{3\sin^2 t \cdot \cos t \cdot \cos 2t + \sin^3 t \cdot \sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \frac{-3\cos^2 t \cdot \sin t \cdot \cos 2t + \cos^3 t \cdot \sin 2t}{3\sin^2 t \cdot \cos t \cdot \cos 2t + \sin^3 t \cdot \sin 2t}$$

$$= \frac{\cos^2 t\,[-3\sin t \cdot \cos 2t + \cos t \cdot \sin 2t]}{\sin^2 t\,[3\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t]}$$

$$= \frac{\cos^2 t\,[-3\sin t\,(2\cos^2 t - 1) + \cos t \cdot \sin 2t]}{\sin^2 t\,[3\cos t\,(1 - 2\sin^2 t) + \sin t \cdot \sin 2t]}$$

$$= \frac{\cos^2 t\,[-6\sin t \cdot \cos^2 t + 3\sin t + \cos t \cdot \sin 2t]}{\sin^2 t\,[3\cos t - 6\cos t\,\sin^2 t + \sin t \cdot \sin 2t]}$$

$$= \frac{\cos^2 t\,[-6\sin t \cdot \cos^2 t + 3\sin t + \cos t \cdot 2\sin t \cdot \cos t]}{\sin^2 t\,[3\cos t - 6\cos t\,\sin^2 t + \sin t \cdot 2\sin t \cdot \cos t]}$$

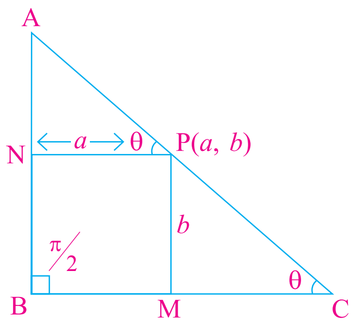
$$= \frac{\cos^2 t \cdot \sin t\,[-6\cos^2 t + 3 + 2\cos^2 t]}{\sin^2 t\,\cos t\,[3 - 6\sin^2 t + 2\sin^2 t]}$$

$$= \frac{cost\,[3-4cos^2 t]}{sint\,[3-4sin^2 t]} = \frac{3cost-4cos^3 t}{3sint-4sin^3 t}$$

$$= \frac{-cos3t}{sin3t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -cot3t$$

25.



કાટકોણ ΔABCમાં $\overline{AC}$ કર્ણ છે.

કર્ણ પરનું બિંદુ $P(a, b)$ છે.

અહીં, $\overline{PM} \perp \overline{BC}$ તથા $\overline{PN} \perp \overline{AB}$

ધારો કે, $\angle APN = \angle PCM = \theta$

ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ હોવાથી, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

→ કાટકોણ ΔAPNમાં,

$$cos\ \theta = \frac{PN}{AP} = \frac{a}{AP}$$

$$\therefore AP = \frac{a}{cos\,\theta}$$

$$\therefore AP = a\ sec\ \theta$$

→ કાટકોણ ΔPMCમાં,

$$sin\ \theta = \frac{PM}{PC} = \frac{b}{PC}$$

$$\therefore PC = \frac{b}{sin\,\theta}$$

$$\therefore PC = b\ cosec\ \theta$$

હવે, $AC = AP + PC$

$\therefore\ AC = a\ sec\ \theta + b\ cosec\ \theta$ .... (1)

$f(\theta) = a\ sec\ \theta + b\ cosec\ \theta$

$\therefore\ f'(\theta) = a\ sec\ \theta \cdot tan\ \theta - b\ cosec\ \theta \cdot cot\ \theta$

$\therefore\ f''(\theta) = a(sec\ \theta \cdot sec^2\ \theta + tan\ \theta \cdot sec\ \theta \cdot tan\ \theta)$

$- b(cosec\ \theta\ (-cosec^2\theta) + cot\ \theta(-cosec\ \theta\ cot\ \theta))$

$\therefore\ f''(\theta) = a(sec^3\ \theta + sec\ \theta \cdot tan^2\ \theta) + b(cosec^3\ \theta + cosec\ \theta\ cot^2\ \theta)$

$\therefore\ f''(\theta) > 0 \qquad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

→ કર્ણની લંબાઈ ન્યૂનતમ મેળવવા માટે,

$f'(\theta) = 0$

$\therefore\ a\ sec\ \theta\ tan\ \theta - b\ cosec\ \theta\ cot\ \theta = 0$

$\therefore\ a\ sec\ \theta\ tan\ \theta = b\ cosec\ \theta\ cot\ \theta$

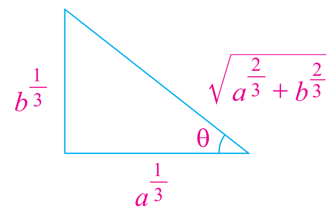
$$\therefore \frac{a}{cos\,\theta}\ \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{b}{sin\,\theta}\ \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}$$

$$\therefore \frac{a}{cos^3\theta} = \frac{b}{sin^3\theta}$$

$$\therefore \frac{sin^3\theta}{cos^3\theta} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore tan^3\theta = \frac{b}{a}$$

$$\therefore tan\ \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$



$$sec\ \theta = \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$cosec\ \theta = \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{1}{3}}}$$

આ કિંમતો પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

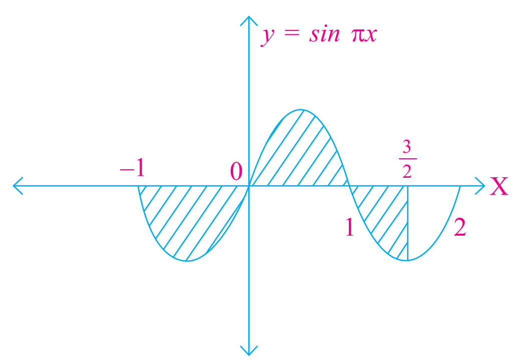
$$\therefore AC = \frac{a\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} + \frac{b\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}$$

$$\therefore AC = \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{1}$$

$$\therefore AC = \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$\therefore$ કર્ણની ન્યૂનતમ લંબાઈ $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ છે.

26.



→ $-1 < x < 0 \Rightarrow sin\ \pi x < 0,\ x < 0$

$\Rightarrow x\ sin\ \pi x > 0$

$\Rightarrow |x\ sin\ \pi x| = x\ sin\ \pi x$

→ $0 < x < 1 \Rightarrow sin\ \pi x > 0,\ x > 0$

$\Rightarrow x\ sin\ \pi x > 0$

$\Rightarrow |x\ sin\ \pi x| = x\ sin\ \pi x$

$\rightarrow \quad 1 < x < \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \sin \pi x < 0,\ x > 0$

$\Rightarrow x \sin \pi x < 0$

$\Rightarrow |x \sin \pi x| = -x \sin \pi x$

અહીં, $f(x) = |x \sin(\pi x)| = \begin{cases} x \sin \pi x, & -1 \le x \le 1 \\ -x \sin \pi x, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

તેથી, $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)|\, dx$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x\, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (-x \sin dx)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x\, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} (x \sin \pi x)\, dx$$

$$= \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

(∵ ખંડશઃ સંકલન)

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right]$$

$$= \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

27.

રીત 1 :

આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\left[xy \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] dy = \left[xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx$$

$$xy \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy - y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) dx = xy \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

જમણી બાજુ અંશ અને છેદને x^2 વડે ભાગતાં,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \dots (1)$$

સમીકરણ (1) એ $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ પ્રકારનું સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે.

→ આ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે $y = vx$ લઈશું.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \qquad \dots (2)$$

$$\therefore v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v \cos v + v^2 \sin v}{v \sin v - \cos v}$$

((1) અને (2)ના ઉપયોગથી)

$$\therefore x \frac{dv}{dx} = \frac{2v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$\therefore \left(\frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v}\right) dv = \frac{2dx}{x}$$

માટે, $\displaystyle\int \left(\frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v}\right) dv = 2 \int \frac{1}{x} dx$

$$\therefore \int \tan v\, dv - \int \frac{1}{v} dv = 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore \log|\sec v| - \log|v| = 2 \log|x| + \log|c_1|$$

$$\therefore \log\left|\frac{\sec v}{vx^2}\right| = \log|c_1|$$

$$\therefore \frac{\sec v}{vx^2} = \pm c_1$$

→ સમીકરણ (3) માં $v = \frac{y}{x}$ મૂકતાં,

$$\therefore \frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = c \qquad \text{જ્યાં, } c = \pm c_1$$

$$\therefore \sec\left(\frac{y}{x}\right) = cxy$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

રીત 2 :

$$\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) y \sin \frac{y}{x} = \left(\frac{y\,dx + x\,dy}{x}\right) \cos \frac{y}{x}$$

$$\therefore d\left(\frac{y}{x}\right) \sin \frac{y}{x} = \frac{d(xy)}{xy} \cos \frac{y}{x}$$

$$\therefore d\left(\frac{y}{x}\right) \tan \frac{y}{x} = \frac{d(xy)}{xy}$$

$$\therefore \log\left|\sec \frac{y}{x}\right| = \log|cxy|$$

$$\therefore \sec \frac{y}{x} = cxy$$